Раздел 2. Тема 4. Занятие 1.

Поверхностные интегралы.

1°. Поверхностный интеграл 1-го рода.

Если S – кусочно гладкая двусторонняя поверхность

$$x = x(u,v)\ ,\ y = y(u,v)\ ,\ z = z(u,v)\ ,\ (u,v) \in \Omega$$

и $f(x,y,z)$ – функция, непрерывная в точках поверхности S, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_\Omega f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\ ,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\ ,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\ ,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\ .$$

Если уравнение поверхности S имеет вид

$$z = z(x,y)\ ,\ (x,y) \in \sigma\ ,$$

где $z(x,y)$ однозначная непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_\sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\ .$$

Этот интеграл не зависит от выбора стороны поверхности S.

2°. Поверхностный интеграл 2-го рода.

Если S – гладкая двусторонняя поверхность, S^+ – ее сторона, характеризуемая направлением нормали $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ – функции, непрерывные на поверхности S, то

$$\iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

Если поверхность S задана в параметрическом виде, то направляющие косинусы нормали $\bar{n}$ определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $A = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $B = \dfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$, $C = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, и знак перед радикалом выбирается надлежащим образом.

При переходе к другой стороне S^- поверхности S поверхностный интеграл меняет свой знак на обратный.

Замечание. Если функцию $f(x,y,z)$ рассматривать как плотность поверхности S в точке (x,y,z), то интеграл $\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS$ представляет собой массу этой поверхности.

Класс: NN 4342, 4343, 4346, 4349, 4360

Дома: NN 4344, 4345, 4348, 4350, 4352

N4343 Найти $I = \iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, где S — поверхность

$x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geqslant 0$.

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \quad z'_x = -\frac{x}{z}, \quad z'_y = -\frac{y}{z}$$

$$dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$I = a\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\left\{1+\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right\}dx\,dy = \Big/\begin{matrix} x=r\cos\varphi, & 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ y=r\sin\varphi, & 0\leq r\leq a\end{matrix}\Big/ =$$

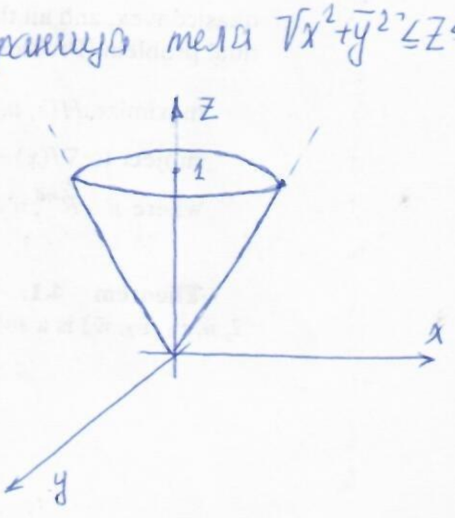
$$= a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left\{1+\frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{a^2-r^2}}\right\}r\,dr =$$

$$= \pi a^3 + a\sqrt{2}\cancelto{0}{\int_0^{2\pi}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)d\varphi}\int_0^a\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr = \pi a^3. \Rightarrow$$

$$I = \pi a^3.$$

N4344 Найти $I = \iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где S — граница тела $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$.

S есть боковая сторона и основание конуса.



$$I = \iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)\,dS + \iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)\,dS,$$

где S_1 — боковая сторона конуса,

S_2 — основание конуса.

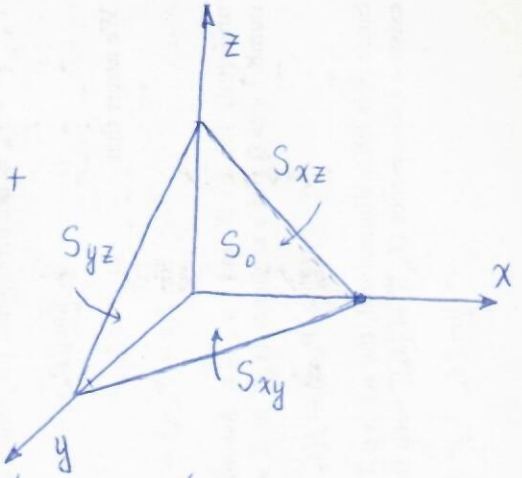
Если S_2, то $z=1 \Rightarrow dS = dx\,dy \Rightarrow \iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy =$

$$= \Big/\begin{matrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi\end{matrix}\Big/ = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^3\,dr = \frac{\pi}{2}.$$

Если S_1, то $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z'_x=\frac{x}{z}$, $z'_y=\frac{y}{z} \Rightarrow \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} =$

$$= \sqrt{2}\,dx\,dy \Rightarrow \iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)\,dS = \sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}).$$

№4345 Найти $I = \iint\limits_S \frac{ds}{(1+x+y)^2}$, где S – граница тетраэдра $x+y+z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.



$$I = \iint\limits_{S_0} \frac{ds}{(1+x+y)^2} + \iint\limits_{S_{xy}} \frac{ds}{(1+x+y)^2} + \iint\limits_{S_{xz}} \frac{ds}{(1+x+y)^2} +$$

$$+ \iint\limits_{S_{yz}} \frac{ds}{(1+x+y)^2}$$

Рассмотрим поверхность S_0 : $z = 1-x-y \Rightarrow z'_x = -1,\ z'_y = -1 \Rightarrow$

$ds = \sqrt{3}\,dx\,dy \Rightarrow$

$$\iint\limits_{S_0} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\right) dx = \sqrt{3}\ln 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогично, S_{yz} : $x = 0 \Rightarrow ds = dy\,dz \Rightarrow$

$$\iint\limits_{S_{yz}} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2}\int_0^{1-y} dz = \int_0^1 \frac{1-y}{(1+y)^2}\,dy = -\frac{2}{1+y}\Big|_0^1 - \ln(1+y)\Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \ln 2.$$

Подобным образом показывается, что $S_{xz} = S_{yz} = 1 - \ln 2$.

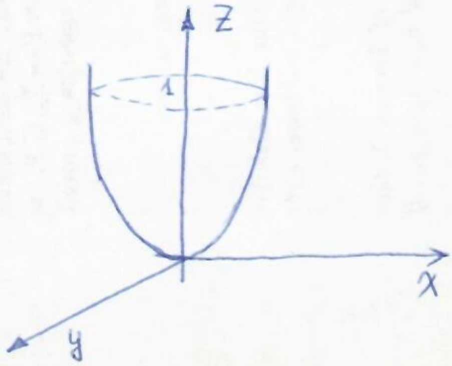
Рассмотрим поверхность S_{xy} : $z = 0$, $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ $ds = dx\,dy \Rightarrow$

$$\iint\limits_{S_{xy}} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \ln 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$I = \sqrt{3}\ln 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} + 2 - 2\ln 2 = (\sqrt{3}-1)\ln 2 + \frac{3-\sqrt{3}}{2}. \Rightarrow$$

$$I = (\sqrt{3}-1)\ln 2 + \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

№4346 Найти $I = \iint\limits_S |xyz|\,ds$, где S – часть поверхности $z = x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$. $\Rightarrow z \ge 0$



$$I = \iint\limits_S |xy| z\,ds = \quad z'_x = 2x,\ z'_y = 2y \Rightarrow$$

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$\circleddash \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy = \left| \begin{matrix} x=r\cos\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi \\ y=r\sin\varphi & 0\le r\le 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} |\cos\varphi\sin\varphi|\,d\varphi \int_0^1 r^4\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr \circleddash$$

$$\int_0^{2\pi} |\cos\varphi\sin\varphi|\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|\sin 2\varphi|\,d\varphi = |\psi = 2\varphi| = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi}|\sin\psi|\,d\psi =$$

$$= \int_0^{\pi}\sin\psi\,d\psi = -\cos\psi\Big|_0^{\pi} = 2$$

$$\circleddash\ 2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,dr = |w=r^2| = \int_0^1 w^2\sqrt{1+4w}\,dw = \left| \begin{matrix} v=\sqrt{1+4w}; \\ w=\frac{v^2-1}{4}; \end{matrix} \right.$$

$$\left. dw = \frac{v\,dv}{2} \right| = \frac{1}{32}\int_1^{\sqrt5} v^2(v^4-2v^2+1)\,dv = \frac{1}{32}\int_1^{\sqrt5}(v^6-2v^4+v^2)\,dv =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{v^7}{7} - 2\frac{v^5}{5} + \frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt5} = \frac{1}{32}\left(\frac{(\sqrt5)^7}{7} - 2\frac{(\sqrt5)^5}{5} + \frac{(\sqrt5)^3}{3}\right) - \frac{1}{32}\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt5}{32}\left(\frac{125}{7} - 10 + \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{32}\cdot\frac{8}{105} = \frac{25\sqrt5}{84} - \frac{1}{420} = \frac{125\sqrt5 - 1}{420}.$$

$$= 4 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ x \ge 0,\, y \ge 0}} xy(x^2+y^2)\, dS = I_*$$

$$z'_x = 2x,\ z'_y = 2y \Rightarrow \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)} \Rightarrow$$

$$I_* = 4 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ x \ge 0,\, y \ge 0}} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx dy = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ y = r\sin\varphi, & 0 \le r \le 1 \end{array} \right| =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r \cdot r^2 \cos\varphi \sin\varphi\, r^2 \sqrt{1+4r^2}\, dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^4 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr =$$

$$= 2\int_0^1 r^4 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr = |w = r^2| = \int_0^1 w^2 \sqrt{1+4w}\, dw = |u = 4w| =$$

$$= \frac{1}{64}\int_0^4 u^2 \sqrt{1+u}\, du = \frac{1}{64} \cdot \frac{2(15u^2-12u+8)\sqrt{(1+u)^3}}{105} \Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{32 \cdot 105}\left\{(240-40)5\sqrt{5} - 8\right\} = \frac{125\sqrt{5}-1}{420} \Rightarrow I = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$

№4348 Найти $I = \iint\limits_S z\, dS$, где S – часть поверхности геликоида

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v,\ 0 \le u \le a,\ 0 \le v \le 2\pi.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial u} = \cos v, & \frac{\partial x}{\partial v} = -u\sin v \\ \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, & \frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v \\ \frac{\partial z}{\partial u} = 0, & \frac{\partial z}{\partial v} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \\ G = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1+u^2 \\ F = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v \equiv 0 \end{array}$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+u^2} \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{2\pi} v\, dv \int_0^a \sqrt{1+u^2}\, du = 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1+u^2}\, du = \pi^2\left(u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right)\Big|_0^a =$$

$$= \pi^2\left(a\sqrt{1+a^2} + \ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right). \Rightarrow$$

$$I = \pi^2\left(a\sqrt{1+a^2} + \ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right).$$

№4349. Найти $I = \iint\limits_S z^2 dS$, где S – часть поверхности конуса

$x = r\cos\varphi\sin\alpha$, $y = r\sin\varphi\sin\alpha$, $z = r\cos\alpha$, $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и α - постоянное.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi\sin\alpha \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi\sin\alpha \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\alpha$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\sin\alpha \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi\sin\alpha \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$E = \cos^2\varphi\sin^2\alpha + \sin^2\varphi\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \equiv 1$$

$$G = r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha + r^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha = r^2\sin^2\alpha$$

$$F = -r\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\alpha + r\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\alpha \equiv 0$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\cos^2\alpha \sqrt{r^2\sin^2\alpha}\, dr = 2\pi\cos^2\alpha\sin\alpha \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha \Rightarrow$$

$$I = \frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha.$$